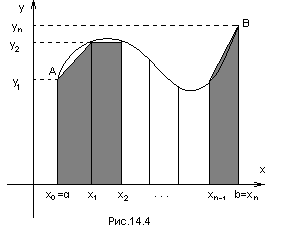
Задание № 6 Приближенное вычисление интегралов

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Метод трапеций**

 В методе трапеций отрезок интегрирования  разбивается на  равных частей. В пределах каждого частичного отрезка график подынтегральной функции заменяется отрезком прямой (рис14.4.). В результате площадь криволинейной трапеции  можно приближенно представить в виде суммы площадей частичных трапеций, соответствующих частичным отрезкам:

 (1)

Если подынтегральная функция  имеет непрерывную вторую производную  на отрезке , то предельную погрешность можно оценить по формуле

 (2)

где  - точная верхняя грань (или наибольшее значение, которое при наших предположениях о кусочной непрерывности, существует) второй производной функции 

**Пример 1.** Вычислить приближенно определенный интеграл  по формуле трапеций, разбивая отрезок интегрирования на 10 равных частей; оценить предельную погрешность формулы. Вычислить этот же интеграл точно, сравнить точное значение с приближенным (оценить фактическую погрешность).

*Решение:* для наглядности ведем вычисления в табличной форме.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | |
| 0 | 0 | 1 | 1,0000 | - |
| 1 | 0,1 | 1,01 |  | 1,0050 |
| 2 | 0,2 | 1,04 |  | 1,0198 |
| 3 | 0,3 | 1,09 |  | 1,0440 |
| 4 | 0,4 | 1,16 |  | 1,0770 |
| 5 | 0,5 | 1,25 |  | 1,1180 |
| 6 | 0,6 | 1,36 |  | 1,1662 |
| 7 | 0,7 | 1.49 |  | 1,2207 |
| 8 | 0,8 | 1,64 |  | 1,2806 |
| 9 | 0,9 | 1.81 |  | 1,3454 |
| 10 | 1 | 2 | 1,4142 | - |
|  | - | - | 2,4142 | 10,2765 |

Подставляя табличные данные в формулу (1), находим приближенное значение интеграла: . Определяем предельную абсолютную погрешность вычисления ; находим наибольшее значение второй производной: ; . Очевидно, что чем больше значение , тем меньше значение выражения , т.е. функция  является строго убывающей и, следовательно, не имеет экстремумов. Значит, ее наибольшее значение достигается на левом конце промежутка : . Таким образом, .

Рассматриваемый интеграл вычисляется точно в элементарных функциях методом интегрирования по частям (см. пример 13.5.6). .

Фактическая погрешность вычисления равна , т.е. , как и должно быть при правильных вычислениях.

**Пример 2.** Вычислить приближенно определенный интеграл  по формуле трапеций, разбивая отрезок интегрирования на 10 равных частей; оценить предельную погрешность формулы. Вычислить этот же интеграл точно, сравнить точное значение с приближенным (оценить фактическую погрешность).

*Решение:* вычисления в табличной форме.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | |
| 0 | 1 | 0,0000 | - |
| 1 | 1,1 |  | 0,0953 |
| 2 | 1,2 |  | 0,1823 |
| 3 | 1,3 |  | 0,2624 |
| 4 | 1,4 |  | 0,3365 |
| 5 | 1,5 |  | 0,4055 |
| 6 | 1,6 |  | 0,4700 |
| 7 | 1,7 |  | 0,5306 |
| 8 | 1,8 |  | 0,5878 |
| 9 | 1,9 |  | 0,6419 |
| 10 | 2 | 0,6931 | - |
|  | - | 0,6931 | 3,5123 |

Подставляя табличные данные в формулу (1), находим приближенное значение интеграла: . Определяем предельную абсолютную погрешность вычисления ; находим наибольшее значение второй производной: ;  - убывающая функция, значит, модуль ее наибольшего значения достигается на левом конце промежутка :. Таким образом, .

Находим точное значение определенного интеграла: 

.

Фактическая погрешность:  .

*Замечание 1*: Приведенные примеры являются учебными, и фактическая погрешность вычисляется в них только с целью продемонстрировать учащимся возможности метода. В реальных прикладных задачах фактическую погрешность не считают – ведь если интеграл легко вычисляется в точном виде, то незачем применять приближенные методы. Обычно в приложениях задача приближенного вычисления интеграла формулируется следующим образом: вычислить приближенно заданный интеграл  с заданной точностью . Алгоритм решения задачи в такой постановке состоит из следующих этапов:

- находится или оценивается максимум модуля второй производной подынтегральной функции;

- находится наименьшее целое число , удовлетворяющее неравенству ;

- далее отрезок интегрирования разбивается на  частей и применяется приближенный метод вычисления интеграла;

*Замечание 2:* табличное задание вычислений позволяет не считать значения функции вручную, а поручить необходимые подсчеты компьютеру, например, в EXCEL.

**Метод парабол**

В методе парабол отрезок интегрирования  разбивается на четное число  равных частей. На каждом удвоенном частичном отрезке график подынтегральной функции  заменяется параболой , три точки которой совпадают с точками графика подынтегральной функции: ,  и , где  - шаг интегрирования (длина частичного отрезка).

Тогда определенный интеграл можно вычислить приближенно по формуле Симпсона .

Таким образом, в методе парабол площадь криволинейной трапеции заменяется суммой  площадей параболических трапеций, каждая из которых ограничена сверху дугой параболы с вертикальной осью симметрии.

Если известна производная четвертого порядка подынтегральной функции, то предельную погрешность можно оценить по формуле , где .

**Пример.** Вычислить приближенно «неберущийся» интеграл , используя метод парабол при .

*Решение:* составляем таблицу значений подынтегральной функции ,  при шаге интегрирования .

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | (нечетные) | | (четные) |
| 0 | 0 | 0 | |  | 1 |
| 1 | 0,1 | 0,0998 | | 0,9985 |  |
| 2 | 0,2 | 0,1988 | |  | 0,9934 |
| 3 | 0,3 | 0,2955 | | 0,9851 |  |
| 4 | 0,4 | 0,3894 | |  | 0,9736 |
| 5 | 0,5 | 0,4794 | | 0,9589 |  |
| 6 | 0,6 | 0,5646 | |  | 0,9411 |
| 7 | 0,7 | 0,6442 | | 0,9203 |  |
| 8 | 0,8 | 0.7174 | |  | 0,8967 |
| 9 | 0,9 | 0,7833 | | 0,8704 |  |
| 10 | 1 | 0,8415 | |  | 0,8415 |



.

В данном примере определение предельной погрешности является громоздкой задачей, связанной с нахождением наибольшего значения четвертой производной функции . Для таких задач разработаны методы оценки предельных погрешностей, не связанные с вычислением производных высоких порядков. В частности, используются методы двойного пересчета, в которых оценка погрешности производится по результатам вычисления интегралов с разными шагами интегрирования.

**Самостоятельная работа:**

14.5.1. Вычислить интеграл по методу трапеций, разбивая интервал интегрирования на пять частей. Вычислить этот же интеграл аналитически, оценить погрешность, объяснить результат.

14.5.4. Вычислить указанные интегралы приближенно по методу трапеций, разбивая интервал интегрирования на 10 частей: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

14.5.5. Вычислить интегралы задачи 14.5.4. приближенно по методу парабол, разбивая интервал интегрирования на 10 частей;

**Ответы:**

**14.5.1.**  Погрешность равна 0, т к «криволинейная» трапеция в этом случае является обычной трапецией.

**14.5.4.** а)1,41; б) 0,86; в) 1,92; г) 1,58; д) 0,90;